

I Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2};$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{2n}{n^3+1};$
3. $\sum_{n \geq 1} (\ln(n^2 + 2) - 2 \ln n);$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot n}\right);$
5. $\sum_{n \geq 1} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right);$
6. $\sum_{n \geq 0} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right);$
7. $\sum_{n \geq 1} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right];$
8. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}.$

II Etudier la convergence et calculer en cas de convergence la somme des séries

1. $\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ (montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$);
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ (décomposer en éléments simples $\frac{1}{x(x+1)}$);
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ (vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$).

III 1. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$.

2. En déduire la nature des séries de terme généraux : $u_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n k!$ et $v_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=0}^n k!$.

IV Montrer que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$

V 1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (si $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ on pourra

considérer les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) .

2. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$

VI 1. Calculer la limite de la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$

2. Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(Si $S_n = n$ -ième somme partielle de la série on a $S_{2N} = s_n$).

VII Pour $a \in \mathbb{R}$ étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} na^n$.

En cas de convergence, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} na^n$ (on pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$).

VIII Etudier les séries de terme général u_n :

1.

2. $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$ (a réel donné);

3. $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ (α réel donné);

4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

IX En encadrant l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ montrer que la suite $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ est convergente.

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.