

Equations linéaires

1 Résoudre les équations différentielles :

a. $y' - \frac{y}{x} = x^2$;

b. $x^3 y' + 2x^2 y = 1 + 3x^2$;

c. $y' = (\tan x) y + \cos x$;

d. $y' - y \tan x = -\cos^2 x$;

e. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 0$;

f. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$;

g. $y'' + 4y' + 4y = (x + 1)e^x$;

h. $y'' - 2y' + 5y = 2 \sin x$;

i. $y'' - 6y' + 9y = \operatorname{sh}^2 x$.

2 Trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy' + 2y = \frac{x}{1 + x^2}$.

3 Montrer que l'équation différentielle $2x(1 + x^2)y' + 2x^2y = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

La résoudre dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver le résultat précédent.

4 a. Montrer que l'équation différentielle $|x|y' + y = x^2$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'équation différentielle $x^2y' - y = (x^2 - 1)e^x$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer que l'équation différentielle $2xy' - 3y = -x$ a une (double) infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

5 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(1 - x^2) - xy = 1$ sur l'intervalle $] -3, 1[$.

6 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t) dt.$$

7 Variables séparables : résoudre l'équation différentielle $\sqrt{1 - y^2}y' + ay = by\sqrt{1 - x^2}$ (a et b sont des constantes réelles).

Applications géométriques

8 Trouver les courbes dont la tangente en un point M coupe l'axe des x en un point N tel que $OM = MN$.

9 Trouver les courbes dont le segment de la tangente compris entre le point de tangence et l'axe des x est divisé en 2 parties égales par le point d'intersection avec l'axe des y .

10 Trouver les courbes dont le segment de la tangente compris entre le point de tangence et l'axe des y ait une longueur égale à 2.